Föreläsning 9

Säg att du har ett uttryck, tex $x^2+y^2=1$, dvs enhetscirkeln. Detta är inte en funktion, utan man kan skriva $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, så vi har två funktioner. Om vi vill hitta tangenter till denna så är det möjligt genom att derivera "rätt" funktion. Frågan är om kan göra det på något annat sätt.

<u>Ex:</u>

Låt $x^2+y^2=1$ vara enhetscirkeln. Se nu y som en funktion av x, så vi betraktar

$$x^2+y^2(x)=1.$$

Derivera nu detta uttryck m.a.p x och kom ihåg inre derivator. Då får man

$$2x+2y(x)\cdot y'(x)=0$$

Lös ut $y'(x)$:

$$y'(x)=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

Alltså är $y'(x)=-\frac{x}{y}$.

Anm:

Det är bättre att skriva $\frac{dy}{dx}$ istället för $y'(x)$, eftersom y' egentligen beror på 2 variabler.

Anm:

Denna typ av derivering kallas för implicit derivering.

Ex: (Vi kan förstås derivera implicit flera gånger).
Betrakta $x^2+y^2=1$ igen. Vi såg tidigare att

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Detta ger att, om vi implicit deriverar en gång till:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1\cdot y - x\cdot y'}{y^2} = \frac{xy'-y}{y^2} =$$

$$\underset{y'=-\frac{x}{y}}{=} \frac{x\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)-y}{y^2} = \frac{-\frac{x^2}{y}-y}{y^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} \underset{x^2+y^2=1}{=} -\frac{1}{y^3}.$$

Ex:

Hitta tangenten till kurvan $x^3y + 2xy^3 = 12$ i punkten $(2,1)$. Implicit derivering ger att

$$3x^2y + x^3y' + 2y^3 + 6xy^2 \cdot y' = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y'(x^3 + 6xy^2) = -2y^3 - 3x^2y$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y' = -\frac{2y^3 + 3x^2y}{x^3 + 6xy^2}$$

Tangentens lutning i $(2,1)$ är därför

$$y'(2,1) = -\frac{2\cdot 1^3 + 3\cdot 2^2\cdot 1}{2^3 + 6\cdot 2\cdot 1^2} = -\frac{2+12}{8+12} = -\frac{14}{20} = -\frac{7}{10}.$$

Detta ger att tangentens ekvation ges av (enligt enpunktsformeln):

$$y - 1 = -\frac{7}{10}(x-2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$10y - 10 = -7x + 14$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{7x + 10y = 24}}.$$

Ex:

Låt $z = \tan\frac{x}{2}$. Vad är då $\frac{d\cancel{x}}{d\cancel{z}}$. Vi har att

implicit derivering ger

$$1 = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{dx}{dz}.$$

Observera att $z^2 = \tan^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$. Därför är

$$\frac{2}{1+z^2} = \frac{2}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{1} = 2\cos^2\frac{x}{2}.$$

Enligt trigonometriska ettan

Alltså är $\frac{dx}{dz} = \frac{2}{1+z^2}$.

Ex: (Derivata av invers)

Låt f vara en bijektiv funktion, och låt f^{-1} vara dess invers. Låt $y = f^{-1}(x)$, dvs $x = f(y)$. Derivera implicit m.a.p x:

$$1 = f'(y)\cdot y' \iff y' = \frac{1}{f'(y)} \underset{y = f^{-1}(x)}{=} \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Alltså är

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = y' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Nu vet vi hur derivera inverser, så låt oss tillämpa det på arcsin, arctan och arccos.

Ex:

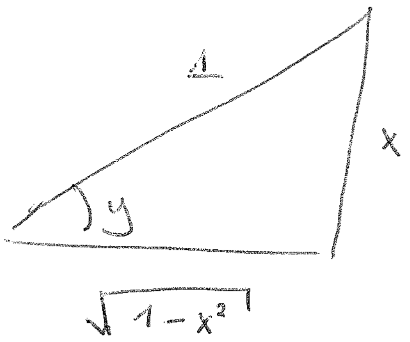
Betrakta $y = \arcsin(x)$, då är $x = \sin y$ för $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.

Enligt föregående exempel så är

$$y' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Frågan är alltså vad är $\cos(\arcsin(x))$?

Vi har att ~~[illegible]~~ $y = \arcsin(x)$, så vi betraktar motsvarande rätvinkliga triangel:



Därför är $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, så

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

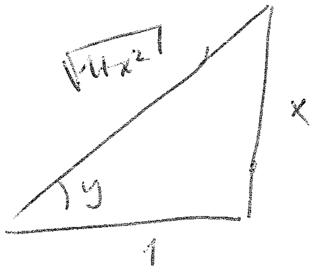
<u>Ex:</u>

Låt nu $y = \arctan(x)$; då är $x = \tan(y)$ för $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Vi vet att

$$y' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \cos^2(\arctan(x))$$

Sätt upp den rätvinkliga triangeln som motsvarar $y = \arctan(x)$:



Därför är $\cos(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, så

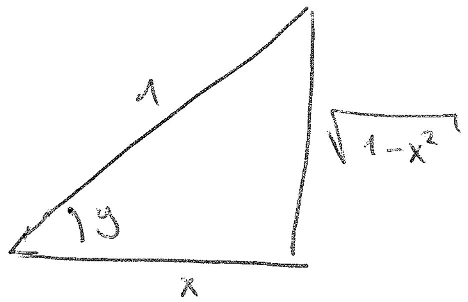
$$y' = \cos^2(\arctan(x)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ex:

Låt nu $y=\arccos(x)$, vand $x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$.

Vi har att

$$y' = -\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arccos(x)\right)} = -\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\cos(\arccos(x)) + \sin\frac{\pi}{2}\sin(\arccos(x))}$$



Så vi behöver beräkna

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Eftersom $\cos\frac{\pi}{2}=0$ och $\sin\frac{\pi}{2}=1$ så är

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Genomgång av dugga!